17/02/2014

Σταθερά πολυώνυμα : δηλ. $f(x) = c$ με $c \in \mathbb{F}$

Βαθμού ≥ 1 δηλ. $\phi(x) = x^5 - 1$

Μπορούμε να θεωρούμε το σώμα $\mathbb{F}$ σαν υποσύνολο του $\mathbb{F}[x]$, δηλ σαν σταθερά πολυώνυμα. Το μηδενικό πολυώνυμο είναι το σταθερό πολυώνυμο με τιμή 0

(κάθε Τετάρτη ασκήσεις.)

ΟΡΙΣΜΟΣ 33

Έστω $\varphi(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n \in \mathbb{F}[x]$ με $b_i \in \mathbb{F}$. Ορίζουμε τιμή $\varphi(x)$ στο α ως εξής $\varphi(\alpha) = b_0 + b_1\alpha + \dots + b_n \alpha^n \in \mathbb{F}$. Το $\xi \in \mathbb{F}$ λέγεται ρίζα του $\varphi(x)$ αν $\varphi(\alpha) = 0_{\mathbb{F}}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 34

Αν $\varphi(x) = x^2 - x - 2 \in \mathbb{R}[x]$ έχουμε $\varphi(1) = -2$, $\varphi(2) = 0_{\mathbb{R}}$, άρα το 2 είναι ρίζα του $\varphi(x)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 35

Έστω $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$ και $\alpha \in \mathbb{F}$. Τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\varphi(x)$ με το $x-\alpha$ είναι ίσο με $\varphi(\alpha)$.

απόδειξη: από διαίρεση πολυωνύμων υπάρχουν $\pi(x), v(x) \in \mathbb{F}[x]$ ώστε $\varphi(x) = \pi(x)(x-\alpha) + v(x)$ και $v(x) = 0$ ή ($v(x) \neq 0$ και $\deg v(x) < \deg(x-\alpha) = 1$) άρα $v(x)$ είναι σταθερά, δηλ. $\exists\, c \in \mathbb{F}$ με $v(x) = c$, άρα $\varphi(x) = \pi(x)(x-\alpha) + v(x) \Rightarrow$ $\varphi(x) = \pi(x)(x-\alpha) + c$ και για $x = \alpha$ παίρνουμε $\varphi(\alpha) = c = v(x)$

ΠΟΡΙΣΜΑ 36

Έστω $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$ και $\alpha \in \mathbb{F}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Το α είναι ρίζα του $\varphi(x)$

(ii) Το $x-\alpha$ διαιρεί το $\varphi(x)$ στο $\mathbb{F}[x]$

απόδειξη: άμεσο από πρόταση 35.

ΠΡΟΤΑΣΗ 37

Έστω $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$ μη σταθερό πολυώνυμο και $\varphi(x) = c\, p_1^{v_1}(x) \dots p_m^{v_m}(x)$ όπου c σταθερά, $p_1(x), \dots, p_m(x)$ μονικά ανάγωγα πολυώνυμα με $p_i(x) \neq p_j(x)$ και v_i θετικοί ακέραιοι. Έστω α ρίζα του $\varphi(x)$. Από πόρισμα 36 το $x-\alpha$ διαιρεί το $\varphi(x)$. Άρα υπάρχει i με $1 \leq i \leq m$ ώστε $p_i(x) = (x-\alpha)$. Ο αριθμός v_i λέγεται ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΑ της ρίζας α. Επίσης φανερά το $\varphi(x)$ έχει το πολύ m ρίζες αν δεν λάβουμε υπόψη τις πολλαπλότητες

ΠΟΡΙΣΜΑ 38

α) Ο αριθμός των διακεκριμένων ριζών του $\varphi(x)$ είναι μικρότερος ή ίσος από τον βαθμό του $\varphi(x)$.

β) Ισχύει το ισχυρότερο: Έστω $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ όλες οι ρίζες του $\varphi(x)$, με ν_i την πολλαπλότητα ως ρίζας λ_i. Τότε $\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_k \leq \deg\varphi(x)$. Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν δεν υπάρχει ανάγωγος διαιρέτης του $\varphi(x)$ βαθμού ≥ 2

ΠΡΟΤΑΣΗ 39α)

Έστω $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$. Αν $\deg\varphi(x)=1$, τότε το $\varphi(x)$ έχει ρίζα και είναι ανάγωγο

απόδειξη: Ξέραμε ότι είναι ανάγωγο. Αφού $\deg\varphi(x)=1$ υπάρχουν $a, b \in \mathbb{F}$ με $a \neq 0$ ώστε $\varphi(x)=a\cdot x+b$. Τότε το $-b/a$ είναι ρίζα του $\varphi(x)$

ΠΡΟΤΑΣΗ 39β)

Έστω $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$ με $\deg\varphi(x)=2$ ή $\deg\varphi(x)=3$. Τότε το $\varphi(x)$ είναι ανάγωγο αν και μόνο αν δεν έχει ρίζα

απόδειξη: Θα δείξουμε $\varphi(x)$ μη ανάγωγο $\Leftrightarrow \varphi(x)$ έχει ρίζα ($\Rightarrow$ αποδ: υποθέτουμε $\varphi(x)$ μη ανάγωγο, άρα υπάρχουν μη σταθερά $\lambda(x), \pi(x) \in \mathbb{F}[x]$ ώστε $\varphi(x)=\lambda(x)\pi(x)$ ⊛ Αφού $2 \leq \deg\varphi(x) = \deg\lambda(x)+\deg\pi(x) \leq 3 \Rightarrow$ τουλάχιστον ένα από τα $\lambda(x)$ ή $\pi(x)$ έχει βαθμό 1, επομένως από πρόταση 39α) έχει ρίζα. Από την ⊛ αυτή είναι ρίζα και του $\varphi(x)$)

$\Leftarrow$ (Εδώ αρκεί $\deg\varphi(x) \geq 2$) Έστω ότι $\deg\varphi(x) \geq 2$ και έχει ρίζα $a \in \mathbb{F}$. Τότε το $x-a$ διαιρεί το $\varphi(x)$ στο $\mathbb{F}[x]$ από το πόρισμα 36. Άρα αφού $\deg\varphi(x) \geq 2$ το $\varphi(x)$ δεν είναι ανάγωγο

ΠΟΡΙΣΜΑ (χωρίς αριθμό)

$\deg\varphi(x) \geq 2$ και $\varphi(x)$ έχει ρίζα $\Rightarrow \varphi(x)$ όχι ανάγωγο

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 40

Για $\deg\varphi(x) \geq$ η προηγούμενη πρόταση δεν ισχύει. Για παράδειγμα, το $\varphi(x) = (x^2+1)^2 \in \mathbb{R}[x]$ ούτε είναι ανάγωγο ούτε έχει ρίζα στο $\mathbb{R}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 41 (χωρίς απόδειξη)

Έστω $\varphi(x) \in \mathbb{C}[x]$ μη σταθερό, $d = \deg\varphi(x)$. Τότε υπάρχουν $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{C}$ με $a_i \neq a_j$ για $i \neq j$ και μοναδικοί θετικοί ακέραιοι $v_1, v_2, \dots, v_p$ και $c \in \mathbb{C} - \{0\}$ ώστε $\varphi(x) = c(x-a_1)^{v_1} \dots (x-a_p)^{v_p}$

ΠΟΡΙΣΜΑ 42

α) Κάθε μη σταθερό πολυώνυμο στο $\mathbb{C}[x]$ έχει ρίζα (Θεμελιώδες θεωρ. της Άλγεβρας)

β) Ένα πολυώνυμο $\varphi(x) \in \mathbb{C}[x]$ είναι ανάγωγο αν και μόνο αν έχει βαθμό 1.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Έστω $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ στο $\mathbb{R}[x]$. Έστω $\xi \in \mathbb{C}$ ρίζα του $\varphi(x)$ με $\xi = c + id$ όπου $c, d \in \mathbb{R}$. Τότε $0 = \varphi(\xi) = a_0 + a_1(c+id) + \dots + a_n(c+id)^n$. Άρα $0 = \bar{0} \leftarrow$ (μιγαδικός συζυγής) δηλ. $\overline{(a+ib)} = a - ib$. $0 = \bar{0} = \overline{\varphi(\xi)} = a_0 + a_1(c-id) + \dots + a_n(c-id)^n = \varphi(\bar{\xi})$

Συμπέρασμα: Αν $\xi \in \mathbb{C}$ ρίζα του $\varphi(x) \in \mathbb{R}[x]$ τότε και $\bar{\xi}$ ρίζα του $\varphi(x)$.

Άρα αν $\xi \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ ρίζα του $\varphi(x)$, τότε και το $\bar{\xi}$ είναι ρίζα και αφού $\xi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ έχουμε $\bar{\xi} \neq \xi$. Σαν συμπέρασμα το $(x-\xi)(x-\bar{\xi})$ διαιρεί το $\varphi(x)$ στο $\mathbb{C}[x]$. Αλλά $(x-\xi)(x-\bar{\xi}) = x^2 - (\xi + \bar{\xi})x + \xi\bar{\xi} \in \mathbb{R}[x]$. Σαν συνέπεια το $(x-\xi)(x-\bar{\xi})$ διαιρεί το $\varphi(x)$ στο $\mathbb{R}[x]$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 43

Έστω $\varphi(x) \in \mathbb{R}[x]$ μη σταθερό πολυώνυμο. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(i) Το $\varphi(x)$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{R}[x]$

(ii) $\deg\varphi(x) = 1$ ή ($\deg\varphi(x) = 2$ και δεν έχει ρίζα στο $\mathbb{R}$)

(iii) $\deg\varphi(x) = 1$ ή ($\deg\varphi(x) = 2$ υπάρχουν $a, b, c \in \mathbb{R}$ με $a \neq 0$ ώστε $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$ και $b^2 - 4ac < 0$)

ΠΡΟΤΑΣΗ 44

Έστω $\varphi(x) \in \mathbb{R}[x]$ μη σταθερό πολυώνυμο περιττού βαθμού. Τότε το $\varphi(x)$ έχει ρίζα στο $\mathbb{R}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 45

Εστω $\varphi(x) \in \mathbb{R}[x]$ με $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_d x^d$ Υποθέτουμε $a_i \in \mathbb{Z}$ και $a_0 \neq 0$, $a_d \neq 0$. Εστω $p, q \in \mathbb{Z}$ με $q \geq 1$ και $ΜΚΔ(p,q) = 1$. Αν το $\frac{p}{q}$ είναι ρίζα του $\varphi(x)$ τότε το p διαιρεί το a_0 και το q διαιρεί το a_d

Απόδειξη: $\varphi\left(\frac{p}{q}\right) = 0 \iff a_0 + a_1 \frac{p}{q} + \dots + a_d\left(\frac{p}{q}\right)^d = 0 \iff a_0 q^d + a_1 q^{d-1} p + \dots + a_{d-1} p^{d-1} q + a_d p^d = 0$ (*)

$$Η \ * \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p \mid a_0 q^d \\ ΜΚΔ(p,q) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow p \mid a_0$$

$$\text{Ομοίως } * \Rightarrow \left.\begin{cases} q \mid a_d p^d \\ ΜΚΔ(p,q) = 1 \end{cases}\right. \Rightarrow q \mid a_d$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 46

Εστω $\varphi(x) = 3x^3 - 6x^2 + x - 2$ Αναζητούμε ρίζες του $\varphi(x)$. Εστω $\frac{p}{q} \in \mathbb{Z}$ και $ΜΚΔ(p,q) = 1$ ώστε $\frac{p}{q}$ ρίζα του $\varphi(x)$. Τότε $p \mid a_0 = -2$ και $q \mid 3$ $p \in \{1, -1, 2, -2\}$ $q \in \{1, 3\}$ Άρα υποψήφιες ρίζες του q $\{1, -1, 2, -2, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\}$

Δοκιμάζοντας το 2 είναι ρίζα του $\varphi(x)$. Επομένως, το $x-2$ διαιρεί το $\varphi(x)$. Με τις πράξεις (διαίρεση) έχουμε: $\varphi(x) = (x-2)(3x^2+1)$. Σαν συμπέρασμα η μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$ του $\varphi(x)$ είναι $\xi = 2$ με πολλαπλότητα 1.